
Progetto CRESCO

Centro computazionale di RicErca sui Sistemi Complessi

SP III.3 Modelli e Strumenti di supporto alla Ottimizzazione e Riconfigurazione delle Reti

Deliverable 4

Report sull'ottimizzazione dei coefficienti caratteristici del modello di traffico

Unità operativa DIIMA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata
Università di Salerno



27/05/2008

Responsabile Unità Operativa
Prof. Ciro D'Apice

SOMMARIO

Introduzione.....	3
1 Modello reti TLC	3
2 Caso di studio.....	7
3 Reti di TLC	12
3.1 Nozioni Preliminari.....	12
3.2 Riemann solvers alle giunzioni	13
3.2.1 Algoritmo RA1- Nodo 2X1	14
3.2.2 Algoritmo RA2- Nodo 2X2	16
3.3 Problemi di controllo ottimo per reti di telecomunicazioni	21
3.4 Ottimizzazione del traffico ad un singolo nodo	23
3.4.1 Ottimizzazione algoritmo RA1 (RA2) – Nodo 2X1:	23
3.4.2 Ottimizzazione algoritmo RA2 – Nodo 2X2:	27
Appendice	30
Bibliografia:	35

Introduzione

Le attività previste dal Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata dell'Università di Salerno nell'ambito del progetto Cresco, inquadrato nel **SP III.3 Modelli e Strumenti di supporto alla Ottimizzazione e Riconfigurazione delle Reti**, hanno riguardato l'analisi e lo sviluppo di tecniche di ottimizzazione per la scelta ottimale dei parametri che caratterizzano il modello fluidodinamico per l'analisi della trasmissione di informazioni su reti di telecomunicazioni.

Uno dei fenomeni critici nella trasmissione di informazioni è la congestione ai nodi, che si verifica quando c'è un sovraccaricamento del flusso di pacchetti in uno o più punti della rete (ad esempio nei router), con conseguente condizione di ritardo critico e degrado delle prestazioni del sistema. In pratica un router congestionato non riesce più a gestire tutti i pacchetti che gli arrivano, inizia a perderli, e ciò causa delle ritrasmissioni che aggravano maggiormente la congestione. Inoltre questo fenomeno si propaga ai router più vicini, coinvolgendo globalmente la rete.

In questo contesto, nell'ambito del progetto CRESCO, sono state sviluppate tecniche di ottimizzazione, basate sull'introduzione di alcuni funzionali di costo, utili a migliorare le prestazioni delle reti e ad evitare fenomeni complessi quali la congestione delle stesse.

Il documento è articolato come segue. La prima sezione introduce l'idea del modello per il flusso del traffico su reti di telecomunicazioni, basato sulle leggi di conservazione, ponendo l'accento sugli algoritmi per l'instradamento dei pacchetti di informazioni, fondamentali per la trattazione. La seconda sezione espone il caso di studio trattato, fornendo dei brevi cenni sull'utilizzo degli algoritmi per nodi 2×1 e 2×2 e sull'ottimizzazione ottenuta. La terza sezione introduce le nozioni base sul modello che serviranno per illustrare le tecniche di ottimizzazione sviluppate; inoltre si richiama la costruzione di soluzioni ai problemi di Riemann ai nodi, per entrambi gli algoritmi di instradamento considerati e si conclude con l'analisi del problema del controllo ottimo dei parametri del modello, introducendo i funzionali di costo nel caso speciale di un singolo nodo.

1 Modello reti TLC

Una rete di telecomunicazioni viene descritta da un numero finito di linee di trasmissione modellate da intervalli $[a_i, b_i]$ (con uno dei due estremi possibilmente infinito) che si incontrano in qualche nodo (routers) che riceve e invia informazioni in forma di pacchetti. Ciascun pacchetto può essere visto come una particella sulla rete, ma bisogna tener conto di questioni specifiche di telecomunicazioni, ad esempio, avendo in mente la rete Internet, si assume che ciascun pacchetto viaggia sulla rete ad una fissata velocità e con un'assegnata destinazione finale e che i routers

ricevano, processino e instradino i pacchetti che possono essere persi con una probabilità che aumenta all'aumentare dei pacchetti processati.

L'idea è di guardare alla rete in una scala temporale intermedia in modo tale che la trasmissione dei pacchetti avvenga ad un livello più veloce ma che gli equilibri della intera rete siano raggiunti solo asintoticamente. Ciò permette di costruire un modello che si basa su una descrizione macroscopica. Se si considerano due routers consecutivi, poichè ciascun router rimanda al nodo successivo i pacchetti persi fin quando non arriva ad esso il segnale di ricezione, si può assumere che in una scala temporale intermedia i pacchetti sono conservati. Passando poi a "backbones" della rete, che sono formati da molti router consecutivi, e guardando in una scala spaziale intermedia, si arriva a considerare un modello consistente in una singola legge di conservazione, in cui la quantità conservata è la densità di pacchetto:

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0, \quad (1)$$

dove ρ è la densità dei pacchetti (numero di pacchetti per unità di spazio) ed $f = \rho v(\rho)$ è il flusso (numero di pacchetti per unità di tempo), con $v(\rho)$ velocità di trasmissione dei pacchetti.

Poiché la velocità su ciascuna linea è supposta costante, è possibile ricavare una velocità media di trasmissione tra i routers considerando la quantità di pacchetti che può essere persa. Assegnando una probabilità di perdita di pacchetto come funzione della densità, passando al limite nella procedura di invio e rinvio dei pacchetti si ottiene una funzione velocità e quindi una funzione flusso.

Si è supposta una funzione di probabilità di perdita di pacchetti del tipo:

$$p(\rho) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho \leq \sigma, \\ \frac{2(\rho - \sigma)}{\rho}, & \sigma \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

dove $\rho_{\max}$ è la densità massima supportata da una linea, e σ è un valore soglia prefissato.

A partire da tale probabilità si è ricavata una velocità media di trasmissione:

$$v(\rho) = \bar{v}(1 - p(\rho)) = \begin{cases} \bar{v}, & 0 \leq \rho \leq \sigma, \\ \bar{v} \frac{(2\sigma - \rho)}{\rho}, & \sigma \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

e da qui la funzione flusso.

Su ciascuna linea di trasmissione viene anche considerato un vettore π che descrive le funzioni di tipo traffico, cioè le percentuali di pacchetti che vanno da una fissata origine ad una fissata destinazione. L'evoluzione di π segue un'equazione semilineare:

$$\pi_t + v(\rho)\pi_x = 0,$$

che viene accoppiata alla legge di conservazione. L'introduzione di tale equazione è giustificata in seguito.

Poiché l'obiettivo è quello di modellare reti complesse è stata risolta la dinamica ai nodi in cui molte linee si intersecano. Il passo principale per la risoluzione del problema di Cauchy ai nodi consiste nella risoluzione del problema di Riemann, problema di Cauchy con dati iniziali di tipo Heavy-side. Alle giunzioni i problemi di Riemann sono sottodeterminati per cui sono stati introdotti ulteriori condizioni. Sono stati considerati due algoritmi di instradamento dei pacchetti:

RA1: I pacchetti dalle linee entranti vanno su quelle uscenti in base alla destinazione finale.

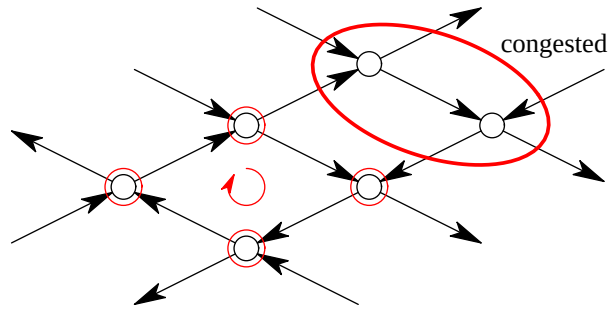
RA2: I pacchetti dalle linee entranti vanno instradati su quelle uscenti al fine di massimizzare il flusso di pacchetti sulle linee entranti ed uscenti.

La differenza principale nei due algoritmi è che mentre il primo non tiene conto di possibili sovraccarichi della rete, e si comporta, con qualche abuso di notazione, come uno "switch", il secondo indirizza i pacchetti sulle linee uscenti tenendo in considerazione i carichi e dunque ridirezionando i pacchetti in modo tale da massimizzare il flusso sia sulle linee entranti che su quelle uscenti. Ancora con qualche abuso di notazione, potremmo dire che il secondo algoritmo si comporta come un "router".

Si osserva che l'algoritmo RA1, già usato per il traffico stradale, prevede la definizione di una matrice di distribuzione del traffico che descrive la percentuale dei pacchetti che dalle linee entranti sono indirizzati sulle linee uscenti.

Per quanto riguarda il secondo algoritmo, non considerato per il traffico stradale in quanto il ridirezionamento non è previsto da un punto di vista modellistico (eccetto che in casi eccezionali, quali la chiusura di qualche strada), per avere unicità delle soluzioni ai problemi di Riemann, sono stati introdotti parametri aggiuntivi, chiamati rispettivamente di priorità, che descrivono le priorità tra linee entranti e parametri di distribuzione che hanno lo stesso significato della matrice di distribuzione del traffico. Il risultato di dipendenza continua dei dati mostra che la scelta di un algoritmo di tipo "router" implica la stabilità delle soluzioni, rispetto a perturbazioni dei dati, contro l'instabilità ottenuta con uno di tipo "switch".

Uno dei "drawbacks" dei precedenti algoritmi è che non si considera il percorso globale dei pacchetti. Per esempio consideriamo una rete in cui alcuni nodi sono congestionati: se usiamo l'algoritmo RA2 che massimizza il flusso sulle linee entranti ed uscenti i pacchetti non sono instradati verso nodi congestionati, per cui potrebbero entrare in loops.



Questi ultimi sono evitati se si considerano che i pacchetti originati da una sorgente e con un'assegnata destinazione hanno percorsi precisi all'interno della rete. Tali percorsi sono determinati dal comportamento alle giunzioni attraverso il vettore π .

Sono state considerate diverse funzioni di distribuzioni del traffico che descrivono diverse strategie di instradamento:

- 1) Ad una giunzione il traffico iniziato da una sorgente s e con destinazione finale d , proveniente dalla linea di trasmissione i , viene instradato su un'assegnata linea j ;
- 2) Ad una giunzione il traffico iniziato da una sorgente s e con destinazione finale d , proveniente dalla linea di trasmissione i , viene instradato su ogni linea (con coefficienti probabilistici) o su alcune di esse.

La prima funzione di distribuzione del traffico era già stata considerata per il traffico stradale, per cui ci è focalizzati sulla seconda, in particolare sono stati analizzate due casi:

- 2a) in una giunzione il traffico proveniente da un'assegnata sorgente e con un'assegnata destinazione viene instradato o non instradato su una linea uscente ;
- 2b) in una giunzione il traffico proveniente da un'assegnata sorgente e con un'assegnata destinazione viene instradato su ogni linea uscente con una certa probabilità.

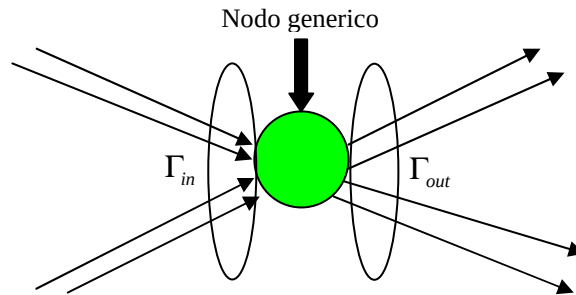
Partendo da una funzione di distribuzione del traffico ed usando il vettore π , si calcola la matrice di distribuzione del traffico.

Per risolvere la dinamica ai nodi infine sono state definite le soluzioni ai problemi di Riemann nei seguenti casi:

- Algoritmo RA1, funzione di distribuzione di tipo 2a);
- Algoritmo RA1, funzione di distribuzione di tipo 2b);
- Algoritmo RA2 funzione di distribuzione di tipo 2a);
- Algoritmo RA2 funzione di distribuzione di tipo 2b).

Osserviamo che nel caso di nodi con un generico numero di linee entranti, ma con una sola linea uscente, poiché i pacchetti devono necessariamente essere instradati su quest'unico link, gli algoritmi RA1 e RA2 coincidono. In particolare se si usa l'algoritmo RA2, definito

$\Gamma = \min\{\Gamma_{in}^{max}, \Gamma_{out}^{max}\}$ dove Γ_{in}^{max} è la somma dei flussi massimi sulle linee entranti e Γ_{out}^{max} è la somma dei flussi massimi sulle linee uscenti, per le linee entranti nel caso in cui $\Gamma_{in}^{max} > \Gamma$ si introduce il parametro di priorità p , mentre per le linee uscenti se $\Gamma_{out}^{max} > \Gamma$ bisogna introdurre il parametro di distribuzione del traffico α .



Tali parametri p e α sono considerati come controlli e inoltre possono essere definiti due funzionali di costo per misurare l'efficienza della rete in termini di:

1. Velocità dei pacchetti che viaggiano attraverso la rete.
2. Tempo impiegato dai pacchetti per andare dalla sorgente alla destinazione.

Il primo verrà indicato con J_1 e il secondo con J_2 . Per ottimizzare le prestazioni della rete, l'idea è quella di massimizzare e minimizzare, rispettivamente, i due funzionali J_1 e J_2 , in funzione dei parametri dipendenti, in modo da ottenere il flusso alla giunzione con massima velocità nel minor tempo possibile.

2 Caso di studio

La topologia della rete che tratteremo nel caso di studio, è mostrata in figura 2.1. La rete consiste di:

- 24 nodi;
- 12 linee entranti;
- 12 linee uscenti;
- 36 linee interne.

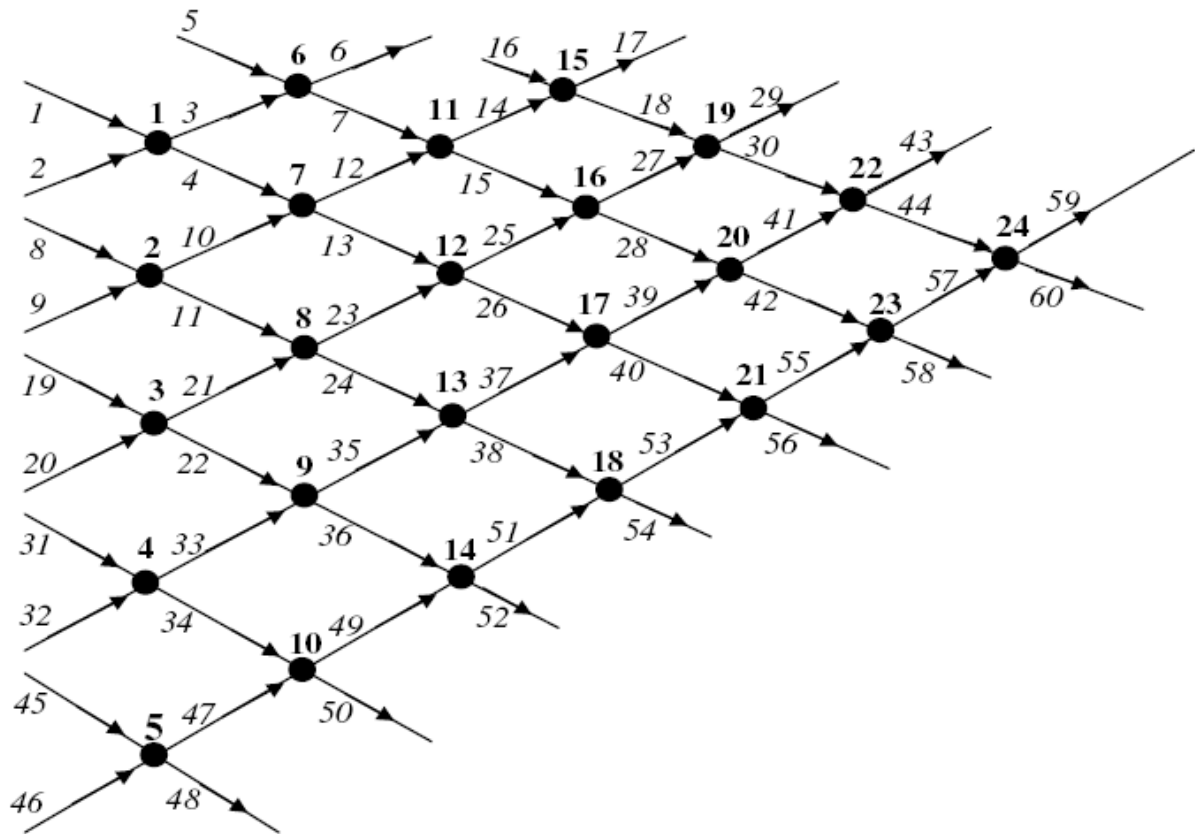


Fig. 2.1: Caso di studio.

Tale sottorete è composta da nodi di tipo 2x2, cioè con due linee entranti e due linee uscenti, per cui illustreremo le tecniche di ottimizzazione per nodi di tale tipo, partendo dall'analisi preliminare di nodi più semplici costituiti da due linee entranti e da una sola linea uscente. Ci limiteremo a considerare un algoritmo di instradamento di tipo RA2.

Nodi 2X1

Poniamo dapprima l'attenzione su giunzioni 2x1 (Fig. 2.2).

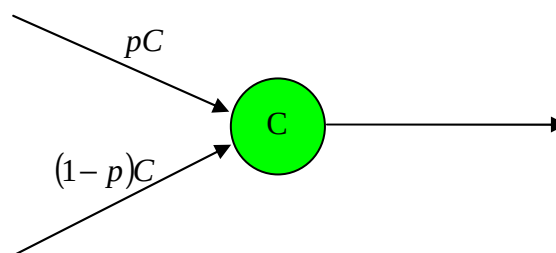


Fig. 2.2: nodo di tipo 2x1.

In questo caso il controllo avviene solo sulle linee entranti attraverso il parametro di priorità p .

Il problema dell'ottimizzazione è completamente risolto, ottenendo la massimizzazione dei funzionali.

Inoltre come già osservato, poiché è presente un'unica linea uscente non è previsto il reinstradamento dei pacchetti sulle linee uscenti al fine di massimizzare il flusso sui link entranti ed uscenti per cui gli algoritmi RA1 ed RA2 coincidono.

Nodi 2X2

Consideriamo una porzione della rete mostrata in Fig.2.1, composta da un unico nodo con due linee entranti e due linee uscenti (Fig.2.3)

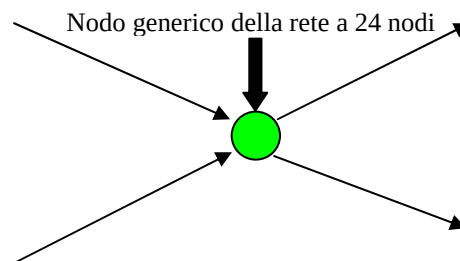


Fig. 2.3: generico nodo.

L'algoritmo di instradamento che prenderemo in considerazione è:

(RA2): i pacchetti sono inviati sulle linee uscenti in modo tale da massimizzare il flusso attraverso la giunzione sia sulle linee entranti che su quelle uscenti.

In particolare ricordiamo che questo tipo di algoritmo invia pacchetti sulle linee uscenti tenendo conto dei carichi delle linee stesse, potendo così ridirezionare i pacchetti.

Analizziamo i seguenti tre casi alla giunzione:

- Flusso di ingresso = massima capacità sui link di uscita. In questo caso tutto ciò che entra nel nodo dalle linee entranti è uguale a tutto ciò che esce dalla linee uscenti. In figura 2.4 è mostrata la situazione: se C è la massima quantità di pacchetti che può entrare nel nodo, sulle linee entranti la quantità di pacchetti è rispettivamente pC e $(1-p)C$, il cui totale dà un'idea del flusso d'ingresso; sulle linee uscenti la quantità di pacchetti è data rispettivamente da αC e $(1-\alpha)C$. Quindi, semplicemente, risulta che $pC + (1-p)C = \alpha C + (1-\alpha)C = C$.

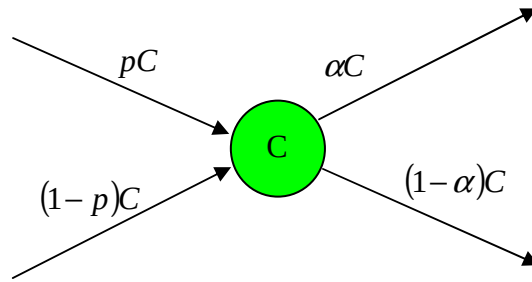


Fig. 2.4: flusso di ingresso = massima capacità sui link di uscita.

- Flusso di ingresso $>$ massima capacità sui link di uscita. La situazione è mostrata in Figura 2.5: non tutti i pacchetti riescono ad entrare nella giunzione (nodo), supporremo che solo una quantità C potrà farlo.

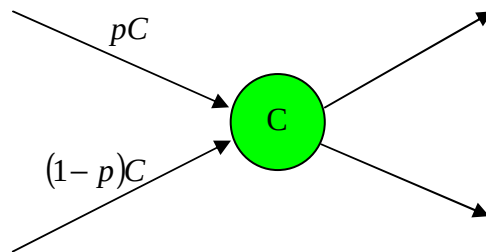


Fig. 2.5: flusso di ingresso $>$ massima capacità sui link di uscita.

Quindi intuitivamente da una linea entrante provengono pC pacchetti, dall'altra provengono $(1-p)C$ pacchetti. Infatti la somma dei pacchetti proveniente da entrambi le linee è esattamente uguale a $pC + (1-p)C = C$.

- Flusso di ingresso $<$ massima capacità sui link di uscita. La situazione è mostrata in Figura 2.6: tutti i pacchetti possono essere smistati sulle linee di trasmissioni uscenti. Assumiamo C la quantità totale del flusso di ingresso da dover smistare sui link di uscita.

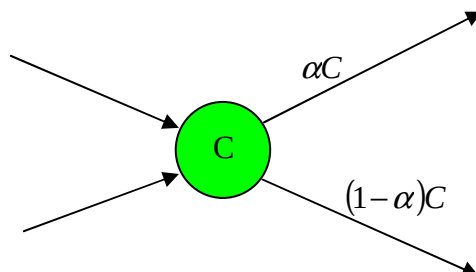


Fig. 2.6: flusso di ingresso $<$ massima capacità sui link di uscita.

Quindi su una linea uscente vengono smistati αC pacchetti, sull'altra invece vengono smistati $(1-\alpha)C$ pacchetti. Infatti la somma dei pacchetti uscenti su entrambe le linee è esattamente uguale a $\alpha C + (1-\alpha)C = C$.

Come già osservato, al fine di scegliere in maniera ottimale i parametri caratteristici della rete sono stati analizzati i due funzionali J_1 e J_2 che, a seconda dei valori dei flussi in ingresso e in uscita, possono dipendere da differenti parametri. Illustriamo graficamente i diversi casi, tenendo presente che il modello utilizzato descrive bene le dinamiche della rete Internet in una scala temporale intermedia e quindi a livello macroscopico la quantità di informazioni trasmessa da una sorgente arriva interamente alla destinazione senza perdita.

- Flusso di ingresso = massima capacità sui link di uscita: i due funzionali J_1 e J_2 non dipendono né da p né da α .

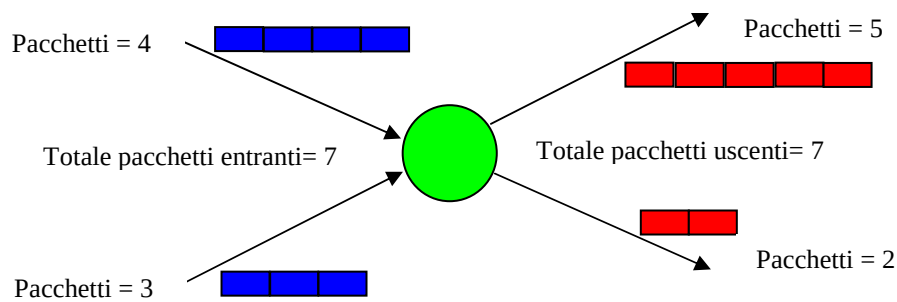


Fig. 2.7: J_1 e J_2 non dipendono né da p né da α .

- Flusso di ingresso > massima capacità sui link di uscita: i funzionali J_1 e J_2 dipendono dal parametro p :

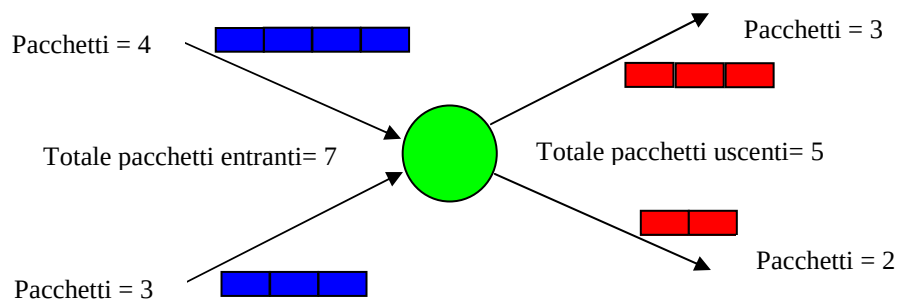


Fig. 2.8: J_1 e J_2 dipendono da p .

- Flusso di ingresso < massima capacità sui link di uscita J_1 e J_2 dipendono dal coefficiente α :

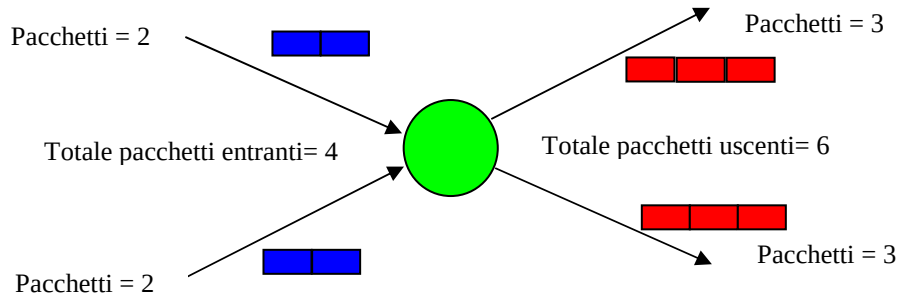


Fig. 2.9: J_1 e J_2 dipendono da α .

3 Reti di TLC

3.1 Nozioni Preliminari

Consideriamo una linea di trasmissione come una sequenza di nodi (routers) N_k . Ciascun nodo N_k invia pacchetti al nodo successivo N_{k+1} e i pacchetti possono essere persi in tale processo.

Assumiamo che esista una funzione $P:[0,\rho_{\max}]\rightarrow[0,1]$, che indica la probabilità di perdita dei pacchetti in funzione della densità dei pacchetti ρ , dove $\rho_{\max}$ è la densità massima. Dalla probabilità di perdita dei pacchetti, è possibile ottenere una velocità media $v(\rho)$, e una funzione flusso $f(\rho)=\rho v(\rho)$.

Assumiamo che:

- (H) La probabilità di perdita dei pacchetti P è una funzione regolare crescente, cioè $P'(\rho)\geq 0$.

La corrispondente funzione di flusso f è concava e ha un unico massimo.

Una rete di telecomunicazioni è rappresentata da un numero finito di linee di trasmissione, modellate da intervalli $I_i=[a_i,b_i]\subset R$, $i=1,\dots,N$, $a_i<b_i$. Tali linee sono connesse da alcuni nodi, e ciascun nodo J ha un numero finito di linee entranti e uscenti; quindi, il modello completo può essere descritto dalla coppia (I,J) dove $I=\{I_i:i=1,\dots,N\}$ è l'insieme di linee, mentre J è l'insieme dei nodi.

Un problema di Riemann (RP) al nodo è un problema di Cauchy con condizioni iniziali costanti su ciascuna linea. Per descrivere le dinamiche ai nodi, introduciamo le seguenti definizioni:

Definizione 1: Un Riemann solver (RS) per un nodo J , che consiste di n linee entranti ed m linee uscenti, è una mappa $RS: [0, \rho_{\max}]^n \times [0, \rho_{\max}]^m \rightarrow [0, \rho_{\max}]^n \times [0, \rho_{\max}]^m$ che associa al dato di Riemann $\rho_0 = (\rho_{1,0}, \dots, \rho_{n+m,0})$ in J un vettore $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n+m})$ tale che la soluzione su una linea entrante $I_i, i = 1, \dots, n$ è data dall'onda $(\rho_{i,0}, \hat{\rho}_i)$ e sulla linea uscente $I_j, j = n+1, \dots, n+m$ è data dall'onda $(\hat{\rho}_j, \rho_{j,0})$. Richiediamo la condizione di consistenza:

$$RS(RS(\rho_0)) = RS(\rho_0).$$

Definizione 2: Sia la funzione $\tau: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una mappa tale che :

1. $f(\tau(\rho)) = f(\rho)$ per ogni $\rho \in [0, 1]$;
2. $\tau(\rho) = \rho$ per ogni $\rho \in [0, 1] \setminus \{\sigma\}$.

Chiaramente τ è ben definita e soddisfa:

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho \leq \sigma &\Leftrightarrow \sigma \leq \tau(\rho) \leq 1, \\ \sigma \leq \rho \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \tau(\rho) \leq \sigma. \end{aligned}$$

3.2 Riemann solvers alle giunzioni

Descriviamo ora due differenti Riemann solvers alla giunzione per i due algoritmi RA1 e RA2. Per l'algoritmo RA1 assumiamo le due seguenti regole:

- (A) il traffico dalle linee di trasmissione entranti è distribuito sulle linee di trasmissione uscenti in accordo a dei coefficienti fissati;
- (B) nel rispetto della regola (A) il router sceglie di mandare i pacchetti di informazioni in modo tale da massimizzare il flusso attraverso la giunzione sulle linee entranti.

Secondo l'algoritmo **RA2** i pacchetti sono processati al tempo di arrivo (politica FIFO) e smistati sulle linee di uscita in modo tale da massimizzare il flusso sia sulle linee entranti che uscenti.

Usando l'algoritmo **RA2** determiniamo un unico RS dipendente dai parametri di distribuzione e priorità, che poi consideriamo come controlli.

Ponendo $\rho_{\max} = 1$ consideriamo due possibili flussi:

$$f(\rho) = \begin{cases} \rho, & \text{if } 0 \leq \rho < \frac{1}{2}; \\ 1 + \rho, & \text{if } \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1; \end{cases} \quad (2)$$

e

$$f(\rho) = \rho(1 - \rho), \quad \rho \in [0, 1] \quad (3)$$

Le corrispondenti funzioni di probabilità di perdita sono, rispettivamente date da:

$$P(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq \rho < \frac{1}{2}; \\ \frac{2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)}{\rho}, & \text{if } \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1; \end{cases}$$

e

$$P(\rho) = \rho.$$

Per ogni funzione di probabilità di perdita P , che soddisfa la (H), definiamo

$$\sigma_1(P) = \inf \{\rho : P(\rho) > 0\},$$

e $\sigma_2(P)$ il massimo valore di f . Vale la seguente proposizione:

Proposizione 3: Data P che soddisfa (H), abbiamo che $\sigma_1(P) \leq \sigma_2(P)$. Inoltre, v è costante su $[0, \sigma_1(P)]$.

Notiamo che per la funzione di flusso (2), abbiamo $\sigma_1(P) = \sigma_2(P) = \frac{1}{2}$. Mentre, per (3), abbiamo

$$\sigma_1(P) = 0, \text{ e } \sigma_2(P) = \frac{1}{2}.$$

3.2.1 Algoritmo RA1- Nodo 2X1

Si consideri la giunzione in Figura 3.1, con a e b linee entranti e c il link uscente:

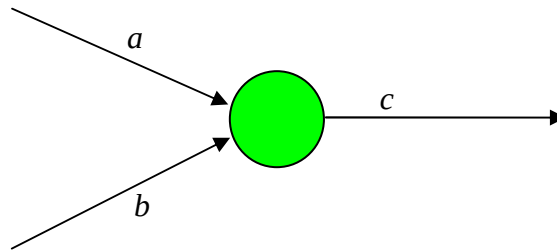


Fig.3.1: nodo di tipo 2x1

Come già osservato per tali nodi gli algoritmi **RA1** e **RA2** coincidono. In questo caso, se le capacità delle linee sono simili, è naturale aspettarsi che non tutti i pacchetti possano attraversare il nodo. Dunque accanto alle regole (A) e (B), abbiamo bisogno di una regola aggiuntiva, che descrive la percentuale di pacchetti che attraversano la giunzione, provenendo da ogni linea. Più precisamente, per un fissato parametro di priorità $p \in]0, 1[$, consideriamo la seguente regola:

(C) Assumiamo che non tutte i pacchetti possono entrare nella linea uscente e sia C la quantità di pacchetti che può farlo. Allora, pC pacchetti provengono dalla prima linea entrante a e $(1-p)C$ pacchetti dalla seconda linea entrante b .

La soluzione al problema di Riemann con dato iniziale $(\rho_{a,0}, \rho_{b,0}, \rho_{c,0})$ viene costruita nel seguente modo. Poiché vogliamo massimizzare il flusso di traffico attraverso il nodo (regola (B)), poniamo:

$$\hat{\gamma}_c = \min \{ \gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max}, \gamma_c^{\max} \},$$

dove $\gamma_i^{\max}$, $i = a, b$, e $\gamma_c^{\max}$ sono rispettivamente i flussi massimi sulle linee entranti e sulla linea uscente. Infatti, $\hat{\gamma}_c$ è il massimo flusso che può aversi attraverso la giunzione e che rispetta la condizione di Rankine - Hugoniot. Si noti che in questo caso, la matrice dei coefficienti di traffico, detta A , definita dalla regola (A), è semplicemente data dal vettore riga (1,1), quindi non viene data nessuna restrizione aggiuntiva. Ciò è dovuta al fatto che c'è una sola linea uscente, e quindi i pacchetti devono fluire verso tale linea necessariamente.

Si consideri ora lo spazio (γ_a, γ_b) e la retta:

$$\gamma_b = \frac{1-p}{p} \gamma_a, \quad (3)$$

definita in accordo alla regola (C). Sia P il punto di intersezione di tale retta con la retta $\gamma_a + \gamma_b = \hat{\gamma}_c$. I flussi finali devono appartenere alla regione:

$$\Omega = \{ (\gamma_a, \gamma_b) : 0 \leq \gamma_i \leq \gamma_i^{\max}, 0 \leq \gamma_a + \gamma_b \leq \hat{\gamma}_c, i = a, b \}.$$

Bisogna distinguere i seguenti casi:

- P appartiene a Ω ;
- P non appartiene a Ω .

I due casi sono rappresentati nella figura seguente.

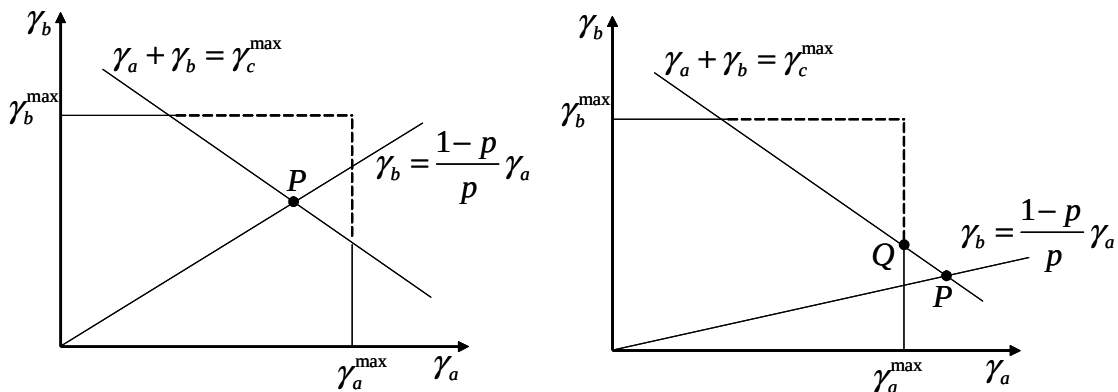


Fig.3.2: P appartenente a Ω e P non appartenente a Ω .

Nel primo caso, poniamo $(\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b) = P$, mentre nel secondo caso poniamo $(\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b) = Q$, dove Q è il punto di $\Omega \cap \{(\gamma_a, \gamma_b) : \gamma_a + \gamma_b = \hat{\gamma}_c\}$ più vicino alla linea (3). Una volta che sono stati determinati $\hat{\gamma}_a$ e $\hat{\gamma}_b$ (e $\hat{\gamma}_c$), possiamo determinare in maniera univoca $\hat{\rho}_i$, $i \in \{a, b, c\}$. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 4. Sia J una giunzione con due linee entranti e una linea uscente. Per ogni $\rho_{a,0}, \rho_{b,0}, \rho_{c,0} \in [0, \rho_{\max}]$, esiste un'unica soluzione debole ammissibile $\rho = (\rho_a, \rho_b, \rho_c)$ alla giunzione J , che soddisfa le regole (A), (B) e (C), tale che $\rho_a(0, \cdot) \equiv \rho_{a,0}$, $\rho_b(0, \cdot) \equiv \rho_{b,0}$, $\rho_c(0, \cdot) \equiv \rho_{c,0}$. Inoltre, esiste un'unica 3-tupla $(\hat{\rho}_a, \hat{\rho}_b, \hat{\rho}_c) \in [0, \rho_{\max}]^3$ tale che

$$\hat{\rho}_i \in \begin{cases} \{\rho_{i,0}\} \cup [\tau(\rho_{i,0}), \rho_{\max}], & \text{se } 0 \leq \rho_{i,0} \leq \sigma, \\ [\sigma, \rho_{\max}], & \text{se } \sigma \leq \rho_{i,0} \leq \rho_{\max}, \end{cases} \quad i = a, b,$$

$$\hat{\rho}_c \in \begin{cases} [0, \sigma], & \text{se } 0 \leq \rho_{c,0} \leq \sigma, \\ \{\rho_{c,0}\} \cup [0, \tau(\rho_{c,0})], & \text{se } \sigma \leq \rho_{c,0} \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

e per $i \in \{a, b\}$, la soluzione è data dall'onda $(\rho_{i,0}, \hat{\rho}_i)$, mentre per la linea uscente la soluzione è data dall'onda $(\hat{\rho}_c, \rho_{c,0})$.

3.2.2 Algoritmo RA2- Nodo 2X2

Poniamoci nel caso di $n = 2$ linee entranti e $m = 2$ linee uscenti. Per una giunzione J , indichiamo le densità dei pacchetti sulle linee entranti a e b , con ρ_a e ρ_b , e sulle linee uscenti c e d , con ρ_c e ρ_d , e con $(\rho_{a,0}, \rho_{b,0}, \rho_{c,0}, \rho_{d,0})$ le condizioni iniziali.

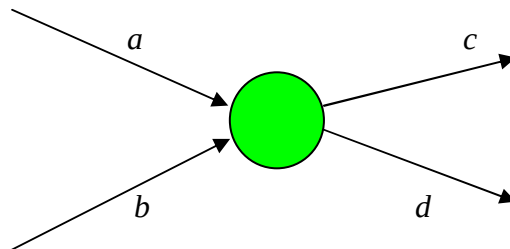


Fig.3.3: Nodo di tipo 2x2.

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 5. Consideriamo una funzione di flusso data da (2) o da (3). Siano $\gamma_\varphi^{\max}$, $\varphi = a, b$, e $\gamma_\psi^{\max}$, $\psi = c, d$, i flussi massimi che si possono ottenere sulle linee entranti e sulle linee uscenti, rispettivamente. Allora:

$$\gamma_\varphi^{\max} = \begin{cases} f(\rho_{\varphi,0}), & \text{if } \rho_{\varphi,0} \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ f\left(\frac{1}{2}\right), & \text{if } \rho_{\varphi,0} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$

$$\gamma_\psi^{\max} = \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right), & \text{if } \rho_{\psi,0} \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ f(\rho_{\psi,0}), & \text{if } \rho_{\psi,0} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Si definisce

$$\Gamma = \min\{\Gamma_{in}, \Gamma_{out}\},$$

dove

$$\Gamma_{in} = \gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max};$$

$$\Gamma_{out} = \gamma_c^{\max} + \gamma_d^{\max}.$$

Il flusso attraverso J è rappresentato da Γ e le soluzioni sulle linee sono determinate usando il parametro di priorità, p , e il coefficiente di distribuzione α .

Per risolvere il problema di Riemann in accordo all'algoritmo (RA2), abbiamo bisogno di alcuni parametri addizionali chiamati parametri di "priorità" e di "distribuzione del traffico". Per semplicità di esposizione, consideriamo prima una giunzione J in cui ci sono due linee di trasmissione con traffico entrante e due linee di trasmissione con traffico uscente. In tal caso, abbiamo solo un parametro di priorità $q \in]0, 1[$ ed un parametro di distribuzione del traffico $\alpha \in]0, 1[$. Denotiamo con $(\rho_{1,0}, \rho_{2,0}, \rho_{3,0}, \rho_{4,0})$ e $(\pi_{1,0}^{s,d}, \pi_{2,0}^{s,d}, \pi_{3,0}^{s,d}, \pi_{4,0}^{s,d})$ i dati iniziali.

Per massimizzare il numero di pacchetti che, attraverso una linea di trasmissione, entrano in una giunzione e da questa escono, definiamo

$$\Gamma = \min\{\Gamma_{in}^{\max}, \Gamma_{out}^{\max}\},$$

dove $\Gamma_{in}^{\max} = \gamma_1^{\max} + \gamma_2^{\max}$ e $\Gamma_{out}^{\max} = \gamma_3^{\max} + \gamma_4^{\max}$. Dunque, vogliamo ottenere Γ come flusso attraverso la giunzione.

Si può facilmente notare che, per risolvere il problema di Riemann, basta determinare i flussi $\hat{\gamma}_i = f(\hat{\rho}_i)$, $i = 1, 2$. Infatti, per avere onde semplici con velocità appropriate, cioè negative sulle linee entranti e positive su quelle uscenti, assegniamo i vincoli (6), (7). Osserviamo che si può calcolare $\hat{\gamma}_i = f(\hat{\rho}_i)$, $i = 1, 2$ senza considerare il tipo di funzione di distribuzione del traffico.

Dobbiamo distinguere due casi:

- $\Gamma_{in}^{\max} = \Gamma$;
- $\Gamma_{in}^{\max} > \Gamma$.

Nel primo caso, scegliamo $\hat{\gamma}_i = \gamma_i^{\max}$, $i = 1, 2$.

Analizziamo il secondo caso, in cui usiamo il parametro di priorità q . Non tutti i pacchetti possono entrare nella giunzione, così sia C la quantità di pacchetti che può farlo. Dunque qC pacchetti provengono dalla prima linea entrante e $(1-q)C$ pacchetti dalla seconda.

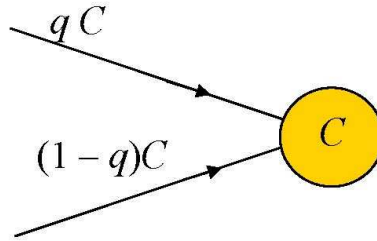


Fig.3.4: interpretazione del parametro di priorità.

Consideriamo lo spazio (γ_1, γ_2) e definiamo le seguenti rette:

$$r_q : \gamma_2 = \frac{1-q}{q} \gamma_1,$$

$$r_\Gamma : \gamma_1 + \gamma_2 = \Gamma.$$

Sia P il punto d'intersezione delle linee r_q e r_Γ . Ricordiamo che il flusso finale dovrebbe appartenere alla regione:

$$\Omega = \{(\gamma_1, \gamma_2) : 0 \leq \gamma_i \leq \gamma_i^{\max}, i = 1, 2\}.$$

Distinguiamo due casi:

- 1a) P appartiene a Ω ;
- 2a) P non appartiene a Ω .

Nel primo caso, scegliamo $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = P$, mentre, nel secondo caso, scegliamo $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = Q = \text{proj}_{\Omega \cap r_\Gamma}(P)$, dove proj è la proiezione canonica su un insieme convesso.

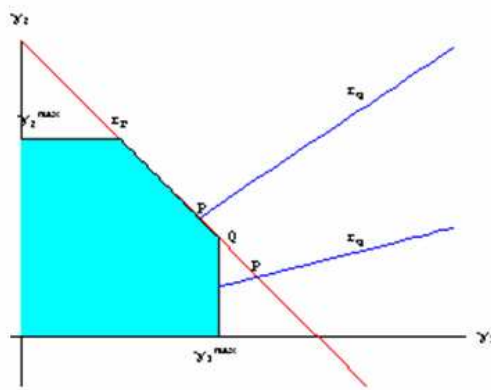


Fig.3.5: Riemann solver per il parametro di priorità.

Il ragionamento si può ripetere anche nel caso di n linee entranti. In R^n la retta r_q è data da $r_q = tv_q$, $t \in R$, con $v_q \in \Delta_{n-1}$ dove

$$\Delta_{n-1} = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \gamma_i = 1 \right\}$$

è il simpleso di dimensione $(n-1)$ e

$$H_\Gamma = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \sum_{i=1}^n \gamma_i = \Gamma \right\}$$

è un iperpiano dove $\Gamma = \min\{\sum_{in} \gamma_i^{\max}, \sum_{out} \gamma_j^{\max}\}$. Poiché $v_q \in \Delta_{n-1}$, allora esiste un unico punto

$P = r_q \cap H_\Gamma$. Se $P \in \Omega$, scegliamo $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) = P$. Se $P \notin \Omega$, allora scegliamo $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) = Q = \text{proj}_{\Omega \cap H_\Gamma}(P)$, la proiezione sull'insieme $\Omega \cap H_\Gamma$. Si osservi che la proiezione è unica poiché $\Omega \cap H_\Gamma$ è un sottoinsieme chiuso convesso di H_Γ .

Osservazione. Una possibile definizione alternativa nel caso $P \notin \Omega$ è scegliere $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$ come uno dei vertici di $\Omega \cap H_\Gamma$.

Come per l'algoritmo (RA1), $\hat{\pi}_i^{s,d} = \pi_{i,0}^{s,d}$, $i = 1, 2$.

Determiniamo, ora, $\hat{\gamma}_j$, $j = 3, 4$.

Come per le linee di trasmissione entranti, dobbiamo distinguere due casi:

- $\Gamma_{out}^{\max} = \Gamma$;
- $\Gamma_{out}^{\max} > \Gamma$.

Nel primo caso, $\hat{\gamma}_j = \gamma_j^{\max}$, $j = 3, 4$. Determiniamo $\hat{\gamma}_j$ nel secondo caso.

Riferiamoci ad α , il parametro di distribuzione del traffico. Poiché non tutti i pacchetti possono essere smistati sulle linee di trasmissione uscenti, sia C la quantità di pacchetti che può farlo. Dunque, αC pacchetti verranno instradati verso la linea uscente I_3 e $(1-\alpha)C$ verso la linea uscente I_4 . Si consideri lo spazio (γ_3, γ_4) e si definiscano le seguenti rette:

$$r_\alpha : \gamma_4 = \frac{1-\alpha}{\alpha} \gamma_3,$$

$$r_\Gamma : \gamma_3 + \gamma_4 = \Gamma.$$

La retta r_α può essere calcolata a partire dalla matrice A . Infatti, se assumiamo che la matrice di distribuzione del traffico A sia assegnata, allora calcoliamo $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$, e scegliamo $v_\alpha \in \Delta_{m-1}$ da

$$v_\alpha = \Delta_{m-1} \cap \{tA(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) : t \in R\},$$

dove

$$\Delta_{m-1} = \left\{ (\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{m+n}) : \gamma_{n+i} \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \gamma_{n+i} = 1 \right\}$$

è il semplice $(m-1)$ dimensionale.

Se abbiamo una matrice A unica ed un unico vettore v_α , allora i flussi sulle linee uscenti vengono calcolati come nel caso senza sorgente e destinazione ([9]).

Distinguiamo due casi:

1b) P appartiene a Ω ;

2b) P non appartiene a Ω .

Nel primo caso, scegliamo $(\hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_4) = P$, mentre nel secondo caso scegliamo $(\hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_4) = Q$, dove $Q = \text{proj}_{\Omega_{adm}}(P)$. Possiamo estendere quanto detto al caso di m linee uscenti come per le linee entranti, definendo l'iperpiano $H_\Gamma = \{(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+m}) : \sum_{j=n+1}^{n+m} \gamma_j = \Gamma\}$ e scegliendo un vettore $v_\alpha \in \Delta_{m-1}$.

Infine, definiamo $\hat{\pi}_i^{s,d}$, $j = 3, 4$:

$$\hat{\pi}_j(t, a_j +, s, d) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_j^{i,s,d,j} \pi_i^{s,d}(t, b_i -, s, d) f(\hat{\rho}_i)}{f(\hat{\rho}_j)},$$

per ogni $t \geq 0, j \in \{n+1, \dots, n+m\}, s \in \mathbf{S}, d \in \mathbf{D}$.

Osservazione. Osserviamo che nel caso dell'algoritmo (RA2) troviamo separatamente la soluzione per le linee entranti ed uscenti.

3.3 Problemi di controllo ottimo per reti di telecomunicazioni

Sia data una rete (I, J) , con nodi aventi al più due linee entranti e al più due linee uscenti, e un dato iniziale $\bar{\rho} = (\bar{\rho}_i)_{i=1, \dots, N}$. L'evoluzione è determinata dall'equazione (1) su ciascuna linea I_i e dai Riemann solvers RS_j a ciascun nodo, dipendenti dai parametri di priorità e di distribuzione del traffico, p e α , rispettivamente. Consideriamo ora p e α come controlli. Per misurare l'efficienza della rete, è naturale considerare:

1. La velocità media alla quale i pacchetti viaggiano sulla rete.
2. Il tempo medio dei pacchetti dalla sorgente alla destinazione.

Chiaramente, l'ottimizzazione di 1. e 2. è la stessa se ci riferiamo ad un singolo pacchetto, ma i valori mediati possono essere molto differenti (siccome c'è una relazione non lineare tra queste due quantità). Siccome il modello considera quantità macroscopiche, possiamo stimare le medie integrando rispettivamente sul tempo e sullo spazio la velocità media e il reciproco della velocità media. Così definiamo i seguenti funzionali:

$$J_1(t) = \sum_i \int_{I_i} v(\rho^i(t, x)) dx$$

$$J_2(t) = \sum_i \int_{I_i} \frac{1}{v(\rho^i(t, x))} dx$$

e per ottenere valori finiti, assumiamo che l'intervallo di ottimizzazione sia dato da $[0, T]$ per qualche $T > 0$.

Notiamo che ciò corrisponde alle seguenti operazioni:

- media nel tempo, per elaborare la funzione di probabilità di perdita;
- media sullo spazio, per passare al limite e ottenere il modello (1);
- integrare sullo spazio e nel tempo per ottenere il valore finale.

Osservazione: Partendo da una rete di telecomunicazione reale, il valore di tali funzionali dipende dall'ordine in cui le medie e le integrazioni sono prese.

Riassumendo, abbiamo i seguenti problemi di controllo ottimale:

Dati: Rete (I, J) ; dati iniziali $\bar{\rho} = (\bar{\rho}_i)_{i=1, \dots, N}$; orizzonte temporale $[0, T]$, $T > 0$.

Dinamiche: L'equazione (1) su ciascuna linea $I \in I$ e il Riemann Solver RS_j per ciascun $J \in J$, dipendente dai controlli α e p .

Variabili di controllo: Parametri di distribuzione del traffico $t \rightarrow \alpha_j(t)$ e parametri di priorità $t \rightarrow p_j(t)$, cioè due controlli per ogni nodo $J \in J$.

Spazio di controllo: $\{(\alpha_j, p_j) : J \in J, \alpha_j, p_j \in L^\infty([0, T], [0, 1])\}$.

Funzioni di costo: Funzionali integrati:

$$\max \int_0^T J_1(t) dt, \quad \min \int_0^T J_2(t) dt.$$

Definizione 6. Chiamiamo (P_i) , il problema di controllo ottimale riferito al funzionale J_i :

$$(P_1) \quad \max_{(\alpha, p)} J_1, \text{ soggetta alla (1)}$$

$$(P_2) \quad \min_{(\alpha, p)} J_1, \text{ soggetta alla (1)}$$

Osservazione. Notiamo che al più una variabile di controllo è attiva ad ogni istante t per un nodo $J \in J$ per cui le funzioni di controllo sono ridondanti. Per esempio si può notare che, per alcune situazioni ($\Gamma_{out} > \Gamma_{in}$), la soluzione del RP al nodo J non dipende da α_j ; quindi, il controllo α_j non influenza la soluzione. In questo senso, α_j non è attivo e per questa ragione può essere considerato ridondante.

La soluzione dei problemi di controllo ottimale di cui sopra è estremamente difficoltosa. Valgono i seguenti risultati:

Proposizione 7. Fissiamo una funzione di probabilità di perdita P che soddisfa la (H), una giunzione J con un assegnato Riemann Solver RS_j e dato iniziale al nodo ρ_0 . Abbiamo:

- (i) Le mappe Input/Output $\alpha \rightarrow f(\hat{\rho}_i(\alpha))$ e $p \rightarrow f(\hat{\rho}_i(p))$ sono continue.
- (ii) Se $\Gamma_{in} < \Gamma_{out}$ e una linea uscente, detta “ $\tilde{\rho}$ ”, soddisfa $\tilde{\rho}_{i,0} > \frac{1}{2}$, allora $\alpha \rightarrow v(\tilde{\rho}_i(\alpha))$ è discontinua. La stessa conclusione si ottiene per $p \rightarrow v(\tilde{\rho}_i(p))$ invertendo i ruoli di linee entranti e linee uscenti.
- (iii) Le mappe Input/Output $\alpha \rightarrow v(\hat{\rho}_i(\alpha))$ e $p \rightarrow v(\hat{\rho}_i(p))$ ammettono sempre un massimo se e soltanto se $\sigma_1(P) = \sigma_2(P)$.

Un'immediata conseguenza della Proposizione 7 è la seguente:

Proposizione 8. Per una data funzione di probabilità di perdita P , se $\sigma_1(P) < \sigma_2(P)$, allora i problemi di controllo ottimale (P_1) e (P_2) possono non avere soluzione se la funzione di flusso è data dalla (3).

Commento. Notiamo che, per il flusso (2), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, mentre per il flusso (3), $\sigma_1 = 0$, e $\sigma_2 = \frac{1}{2}$.

Per la Proposizione 8, nel caso del flusso (3), potremmo non avere soluzioni. Al contrario, la Proposizione 8 non si applica nel caso del flusso (2). Per di più, abbiamo sempre una soluzione come mostrato nel Teorema 10.

Nella soluzione dei problemi (P_i) proponiamo il seguente approccio:

Step 1: Per ciascuno nodo J e Riemann solver RS_j , si risolve il problema di controllo ottimale semplificato:

$$\max(\text{or min}) J_i(T),$$

per T sufficientemente grande, sulla rete formata soltanto da J con dati costanti iniziali, prendendo soluzioni approssimate quando c'è assenza di esistenza.

Step 2: Applichiamo il controllo ottimo ottenuto a ogni istante di tempo t nell'orizzonte di ottimizzazione e a ogni nodo J , prendendo il valore su J su ciascuna linea come dato iniziale.

Illustriamo lo step 1 nelle prossime sezioni. Notiamo che, per T sufficientemente grande, assumiamo che il dato è costante su ciascuna linea: questo semplifica fortemente l'approccio.

3.4 Ottimizzazione del traffico ad un singolo nodo

3.4.1 Ottimizzazione algoritmo RA1 (RA2) – Nodo 2X1:

Consideriamo ora la funzione di flusso data da:

$$f(\rho) = v_{\max} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

I funzionali di costo potranno essere scritti come segue:

$$J_1 = V_{ac} + V_{bc};$$

$$J_2 = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c};$$

dove $V_{\varphi c} = v(\hat{\rho}_\varphi) + v(\hat{\rho}_c) = v_{\max} \left(2 - \frac{\hat{\rho}_\varphi + \hat{\rho}_c}{\rho_{\max}} \right)$, $\varphi = a, b$, e $\hat{\rho}$ è la soluzione del PR al nodo. Essendo

$v_{\max} \hat{\rho} \left(1 - \frac{\hat{\rho}}{\rho_{\max}} \right) = \hat{\gamma}$, si ha:

$$\hat{\rho} = \frac{v_{\max}}{2} \left(1 \pm \sqrt{\Delta(\hat{\gamma})} \right),$$

con $\sqrt{\Delta(\hat{\gamma})} = v_{\max}^2 - 4 \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \hat{\gamma}$ e

$$\begin{aligned} v(\hat{\rho}_\varphi) &= v_{\max} \left(1 - \frac{\hat{\rho}_\varphi}{\rho_{\max}} \right) = \frac{v_{\max}}{2\rho_{\max}} \left(2\rho_{\max} - v_{\max} - s_\varphi \sqrt{\Delta(\hat{\gamma}_\varphi)} \right), \varphi = a, b, \\ v(\hat{\rho}_c) &= v_{\max} \left(1 - \frac{\hat{\rho}_c}{\rho_{\max}} \right) = \frac{v_{\max}}{2\rho_{\max}} \left(2\rho_{\max} - v_{\max} - s_c \sqrt{\Delta(\hat{\gamma}_c)} \right), \end{aligned}$$

e,

per linee entranti:

$$s_\varphi = \begin{cases} -1 & \text{se } \rho_{\varphi,0} < \sigma \text{ e } \gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max} \leq \gamma_c^{\max} \text{ oppure } \rho_{\varphi,0} < \sigma, \gamma_c^{\max} < \gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max} \text{ e } p_\varphi \hat{\gamma}_c \geq \gamma_\varphi^{\max} \\ +1 & \text{se } \rho_{\varphi,0} \geq \sigma, \text{ oppure } \rho_{\varphi,0} < \sigma, \gamma_c^{\max} < \gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max} \text{ e } p_\varphi \hat{\gamma}_c < \gamma_\varphi^{\max} \end{cases}$$

per linee uscenti:

$$s_c = \begin{cases} -1 & \text{se } \rho_{c,0} \leq \sigma, \text{ o } \rho_{c,0} > \sigma, \gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max} < \gamma_c^{\max}; \\ +1 & \text{se } \rho_{c,0} > \sigma, \gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max} \geq \gamma_c^{\max}, \end{cases}$$

dove

$$p_\varphi = \begin{cases} p, & \text{if } \varphi = a; \\ 1-p, & \text{if } \varphi = b. \end{cases}$$

Allora si ha:

$$V_{\varphi c} = \frac{v_{\max}}{2\rho_{\max}} \left(4\rho_{\max} - 2v_{\max} - s_\varphi \sqrt{\Delta(\hat{\gamma}_\varphi)} - s_c \sqrt{\Delta(\hat{\gamma}_c)} \right), \varphi = a, b,$$

$$J_1 = \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \left[2(2\rho_{\max} - v_{\max}) - s_c \sqrt{\Delta(\hat{\gamma}_c)} - \frac{1}{2} (s_a \sqrt{\Delta(\hat{\gamma}_a)} + s_b \sqrt{\Delta(\hat{\gamma}_b)}) \right], \quad (2a)$$

$$J_2 = \sum_{i \in \{a,b,c\}} \frac{2\rho_{\max}}{v_{\max} \left(2\rho_{\max} - v_{\max} - s_i \sqrt{\Delta(\hat{\gamma}_i)} \right)}, \quad (3a)$$

Si considerino le seguenti condizioni:

$$\mathbf{A1} \quad \tilde{\gamma}_a = p\hat{\gamma}_c < \gamma_a^{\max};$$

$$\mathbf{A2} \quad \tilde{\gamma}_b = (1-p)\hat{\gamma}_c < \gamma_b^{\max}.$$

Le soluzioni del RP, quindi, sono le seguenti:

- $(p\hat{\gamma}_c, (1-p)\hat{\gamma}_c, \gamma_c^{\max})$, se entrambe **A1** ed **A2** sono soddisfatte;
- $(\gamma_a^{\max}, \hat{\gamma}_c - \gamma_a^{\max}, \gamma_c^{\max})$, se **A1** non è soddisfatta ed **A2** lo è;
- $(\hat{\gamma}_c - \gamma_b^{\max}, \gamma_b^{\max}, \gamma_c^{\max})$, **A2** non è soddisfatta ed **A1** lo è.

Il caso in cui **A1** ed **A2** siano entrambe false non è possibile dal momento che risulterebbe $\hat{\gamma}_c > \gamma_a^{\max} + \gamma_b^{\max}$.

Fissato ρ_φ , $\varphi \in \{a, b\}$, e ρ_c , è possibile determinare per quali valori di p sono soddisfatte le condizioni **A1** ed **A2**. Se $\hat{\gamma}_c = \gamma_c^{\max}$, sia:

$$\begin{aligned} \gamma'_a &= \hat{\gamma}_c - \gamma_b^{\max}, \\ \gamma'_b &= \hat{\gamma}_c - \gamma_a^{\max}, \\ k^- &= \frac{\gamma'_b}{\gamma_a^{\max}}, \\ k^+ &= \frac{\gamma_b^{\max}}{\gamma'_a}. \end{aligned}$$

È facile controllare che vale la relazione $k^- \leq k^+$. Allora, si ha

- per $p \geq \frac{1}{1+k^-}$, **A1** è falsa ed **A2** è vera,
- per $p \leq \frac{1}{1+k^+}$, **A1** è vera ed **A2** è falsa,
- per $\frac{1}{1+k^+} < p < \frac{1}{1+k^-}$, risulta che **A1** ed **A2** sono entrambe verificate.

Si assuma, allora, che **A1** ed **A2** siano entrambe verificate. In questo caso,

$$\hat{\gamma} = (p\hat{\gamma}_c, (1-p)\hat{\gamma}_c, \gamma_c^{\max}).$$

Massimizzare J_1 e minimizzare J_2 equivale a massimizzare la (2a) e minimizzare la (3a), rispettivamente. Essendo **A1** ed **A2** entrambe soddisfatte, per s_a ed s_b risulta un unico caso in cui $s_a = s_b = +1$. Allora bisogna massimizzare

$$\hat{J}_1 = -\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} [\beta_1(p\hat{\gamma}_c) + \beta_1(\hat{\gamma}_c - p\hat{\gamma}_c)],$$

e minimizzare

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{\beta_2(-1, p\hat{\gamma}_c)} + \frac{1}{\beta_2(-1, \hat{\gamma}_c - p\hat{\gamma}_c)},$$

con

$$\beta_1(x) = \sqrt{v_{\max} \left(v_{\max} - 4 \frac{x}{\rho_{\max}} \right)},$$

$$\beta_2(a, x) = 2\rho_{\max} - v_{\max} + a \sqrt{v_{\max} \left(v_{\max} - 4 \frac{x}{\rho_{\max}} \right)},$$

dove $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$ sono la parti , rispettivamente, della (2a) e (3a), non dipendenti dal parametro p .

Nel caso in cui la condizione **A1** è falsa ed **A2** vera, o viceversa, allora i funzionali di costo J_1 e J_2 sono costanti rispetto a p . In particolare si avrà:

$$\hat{J}_1 = \begin{cases} -\beta_1(\gamma_{\phi}^{\max}) - \beta_1(\hat{\gamma}_c - \gamma_{\phi}^{\max}) & \text{se } s_a = s_b = +1 \text{ e } p_{\phi} \hat{\gamma}_c \geq \gamma_{\phi}^{\max}, \\ +\beta_1(\gamma_{\phi}^{\max}) - \beta_1(\hat{\gamma}_c - \gamma_{\phi}^{\max}) & \text{se } s_{\phi} = -1 \text{ e } p_{\phi} \hat{\gamma}_c \geq \gamma_{\phi}^{\max}, \end{cases}$$

$$\hat{J}_2 = \begin{cases} \frac{1}{\beta_2(-1, \gamma_{\phi}^{\max})} + \frac{1}{\beta_2(-1, \hat{\gamma}_c - \gamma_{\phi}^{\max})} & \text{se } s_a = s_b = +1 \text{ e } p_{\phi} \hat{\gamma}_c \geq \gamma_{\phi}^{\max}, \\ \frac{1}{\beta_2(+1, \gamma_{\phi}^{\max})} + \frac{1}{\beta_2(+1, \hat{\gamma}_c - \gamma_{\phi}^{\max})} & \text{se } s_{\phi} = -1 \text{ e } p_{\phi} \hat{\gamma}_c \geq \gamma_{\phi}^{\max}. \end{cases}$$

Per completare l'analisi dei costi è sufficiente effettuare le loro derivate rispetto a p nella regione in cui **A1** ed **A2** risultano essere entrambe vere. È facile trovare che J_1 decresce per $p < \frac{1}{2}$ e cresce per $p > \frac{1}{2}$, mentre per J_2 accade esattamente l'opposto.

Una scelta ottima per il parametro p è data nel seguente Teorema.

Teorema 9. Si consideri un incrocio con una linea entrante e due uscenti. I funzionali di costo J_1 e J_2 risultano essere ottimizzati per gli stessi valori di p .

In particolare,

1 per $s_a = s_b = +1$, si ha che:

- a. $p \in [0, \frac{1}{1+k^+}]$, se $k^- \leq 1 \leq k^+$, con $k^-k^+ > 1$, oppure $1 \leq k^- \leq k^+$;
 - b. $p \in [0, \frac{1}{1+k^+}] \cup [\frac{1}{1+k^-}, 1]$, se $k^- \leq 1 \leq k^+$, con $k^-k^+ = 1$;
 - c. $p \in [\frac{1}{1+k^-}, 1]$, se $k^- \leq 1 \leq k^+$, con $k^-k^+ < 1$, oppure $k^- \leq k^+ \leq 1$;
- 2 per $s_a = s_b = -1$, si ha che:
- a. $p \in [0, \frac{1}{1+k^+}]$, se $k^- \leq 1 \leq k^+$, con $k^-k^+ < 1$, oppure $k^- \leq k^+ \leq 1$;
 - b. $p \in [0, \frac{1}{1+k^+}] \cup [\frac{1}{1+k^-}, 1]$, se $k^- \leq 1 \leq k^+$, con $k^-k^+ = 1$;
 - c. $p \in [\frac{1}{1+k^-}, 1]$, se $k^- \leq 1 \leq k^+$, con $k^-k^+ > 1$, oppure $1 \leq k^- \leq k^+$;
- 3 per $s_a = -1 = -s_b$, si ha che $p \in [\frac{1}{1+k}, 1]$,
- 4 per $s_a = +1 = -s_b$, si ha che $p \in [0, \frac{1}{1+k^+}]$

3.4.2 Ottimizzazione algoritmo RA2 – Nodo 2X2:

Concentriamoci sulla funzione di flusso data dalla (2). Per l'ottimizzazione della funzione di flusso $f(\rho) = \rho(1 - \rho)$, ci riferiamo a [23] – [24].

Sia $\hat{\rho} = \hat{\gamma}$, $0 \leq \hat{\rho} \leq 1$, e $\hat{\rho} = 1 - \hat{\gamma}$, $\frac{1}{2} \leq \hat{\rho} \leq 1$. Abbiamo che $v(\hat{\rho}) = H(-s_\varphi) + \frac{1 - \hat{\rho}_\varphi}{\hat{\rho}_\varphi} H(s_\varphi)$,

$\rho = a, b$, $v(\hat{\rho}_\psi) = H(-s_\psi) + \frac{1 - \hat{\rho}_\psi}{\hat{\rho}_\psi} H(s_\psi)$, $\psi = c, d$, dove $H(\times)$ è la funzione di Heavyside e, per

le linee entranti:

$$s_\varphi = \begin{cases} -1, & \text{if } \rho_{\varphi,0} < \frac{1}{2}; \\ +1, & \text{if } \rho_{\varphi,0} \geq \frac{1}{2}; \end{cases}$$

per le linee uscenti:

$$s_\psi = \begin{cases} -1, & \text{if } \rho_{\psi,0} < \frac{1}{2}; \\ +1, & \text{if } \rho_{\psi,0} \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Poi per T sufficientemente grande,

$$J_1(T) = 2[v(\hat{\rho}_a) + v(\hat{\rho}_b) + v(\hat{\rho}_c) + v(\hat{\rho}_d)], \quad (6)$$

$$J_2(T) = t(\hat{\rho}_a) + t(\hat{\rho}_b) + t(\hat{\rho}_c) + t(\hat{\rho}_d), \quad (7)$$

con

$$t(\hat{\rho}_x) = \frac{\hat{\rho}_x}{H(s_x) + \hat{\rho}_x[H(-s_x) - H(s_x)]}.$$

Definiamo le seguenti condizioni:

$$A_1 : \gamma_c = \alpha \Gamma_{in} < \gamma_c^{\max};$$

$$A_2 : \gamma_d = (1 - \alpha) \Gamma_{in} < \gamma_d^{\max}.$$

Quindi, se $\Gamma = \Gamma_{in}$, le soluzioni del RP sono:

- $\hat{\gamma} = (\gamma_a^{\max}, \gamma_b^{\max}, \alpha \Gamma_{in}, (1 - \alpha) \Gamma_{in})$, se A_1 e A_2 sono entrambe soddisfatte;
- $\hat{\gamma} = (\gamma_a^{\max}, \gamma_b^{\max}, \gamma_c^{\max}, \Gamma_{in} - \gamma_c^{\max})$, se A_1 non è soddisfatta e A_2 è soddisfatta;
- $\hat{\gamma} = (\gamma_a^{\max}, \gamma_b^{\max}, \Gamma_{in} - \gamma_d^{\max}, \gamma_d^{\max})$, se A_1 è soddisfatta e A_2 non è soddisfatta;

Notiamo che il caso di A_1 e A_2 entrambe false non è possibile, giacchè sarebbe $\Gamma_{in} > \Gamma_{out}$.

Per le linee entranti, consideriamo le condizioni:

$$B_1 : \gamma_a = p \Gamma_{out} < \gamma_a^{\max};$$

$$B_2 : \gamma_b = (1 - p) \Gamma_{out} < \gamma_b^{\max}.$$

Ora, se $\Gamma = \Gamma_{out}$, le soluzioni del RP sono le seguenti:

- $\hat{\gamma} = (p \Gamma_{out}, (1 - p) \Gamma_{out}, \gamma_c^{\max}, \gamma_d^{\max})$, se B_1 e B_2 sono entrambe soddisfatte;
- $\hat{\gamma} = (\gamma_a^{\max}, \Gamma_{out} - \gamma_a^{\max}, \gamma_c^{\max}, \gamma_d^{\max})$, se B_1 non è soddisfatta e B_2 è soddisfatta;
- $\hat{\gamma} = (\Gamma_{out} - \gamma_b^{\max}, \gamma_b^{\max}, \gamma_c^{\max}, \gamma_d^{\max})$, se B_1 è soddisfatta e B_2 non è soddisfatta;

Notiamo che il caso B_1 e B_2 entrambe false non è possibile, giacchè sarebbe $\Gamma_{out} > \Gamma_{in}$.

Una volta fissati ρ_φ e ρ_ψ , $\varphi \in \{a, b\}$ e $\psi \in \{c, d\}$, possiamo avere per qualche valore di α e p che le condizioni A_1, A_2, B_1, B_2 sono soddisfatte come segue. Se $\Gamma = \Gamma_{in}$, sia

$$\gamma_c' = \Gamma - \gamma_d^{\max}, \quad \gamma_d' = \Gamma - \gamma_c^{\max},$$

$$\beta^- = \frac{\gamma_d'}{\gamma_c^{\max}}, \quad \beta^+ = \frac{\gamma_d^{\max}}{\gamma_c'}.$$

Poi, si ha che

- per $\alpha \geq \frac{1}{1+\beta^-}$, A_1 è falsa e A_2 è vera,
- per $\alpha \leq \frac{1}{1+\beta^+}$, A_1 è vera e A_2 è falsa,
- per $\frac{1}{1+\beta^+} \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^-}$, A_1 e A_2 sono entrambi vere.

Se diversamente $\Gamma = \Gamma_{out}$, sia

$$\begin{aligned} \gamma_a' &= \Gamma - \gamma_b^{\max}, & \gamma_b' &= \Gamma - \gamma_a^{\max}, \\ q^- &= \frac{\gamma_b'}{\gamma_a^{\max}}, & q^+ &= \frac{\gamma_b^{\max}}{\gamma_a'} \end{aligned}$$

Poi, si ha

- per $p \geq \frac{1}{1+q^-}$, B_1 è falsa e B_2 è vera,
- per $p \leq \frac{1}{1+q^+}$, B_1 è vera e B_2 è falsa,
- per $\frac{1}{1+q^+} \leq p \leq \frac{1}{1+q^-}$, B_1 e B_2 sono entrambi vere.

L'obiettivo è massimizzare il costo $J_1(T)$ e minimizzare il costo $J_2(T)$ rispetto ai parametri α e p .

Teorema 10: Consideriamo una giunzione J con due linee entranti e due linee uscenti. Se $\Gamma = \Gamma_{in} = \Gamma_{out}$ e T è sufficientemente grande, i funzionali di costo $J_1(T)$ e $J_2(T)$ non dipendono né da α né da p . Se $\Gamma = \Gamma_{in}$, i funzionali di costo $J_1(T)$ e $J_2(T)$ dipendono solo da α . I valori ottimi per $J_1(T)$ sono i seguenti:

- (i) Se $s_c = s_d = +1$, e $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $\beta^- \beta^+ > 1$, oppure $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$, $\alpha \in [0, \frac{1}{1+\beta^+}]$;
- (ii) Se $s_c = s_d = +1$, e $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $\beta^- \beta^+ = 1$, $\alpha \in [0, \frac{1}{1+\beta^+} [\cup] \frac{1}{1+\beta^-}, 1]$;
- (iii) Se $s_c = s_d = +1$, e $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $\beta^- \beta^+ < 1$, oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$, $\alpha \in [\frac{1}{1+\beta^-}, 1]$;
- (iv) Se $s_c = -s_d = -1$, $\alpha \in [0, \frac{1}{1+\beta^+}[$ nel caso: $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$, oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$;
- (v) Se $s_c = -s_d = +1$, $\alpha \in]\frac{1}{1+\beta^-}, 1]$ nel caso: $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$, oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$.

Se $\Gamma = \Gamma_{in}$, i valori ottimi per $J_2(T)$ sono i seguenti:

- (i) Se $s_c = s_d = +1$, oppure $s_c = -s_d = -1$ e $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $\alpha = \frac{1}{2}$;
- (ii) Se $s_c = s_d = +1$, e $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$, $\alpha \in [0, \frac{1}{1+\beta^+}]$;
- (iii) Se $s_c = s_d = +1$, e $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$, $\alpha \in [\frac{1}{1+\beta^-}, 1]$;
- (iv) Se $s_c = -s_d = -1$, e $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$, oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$, $\alpha \in [0, \frac{1}{1+\beta^+}]$;
- (v) Se $s_c = -s_d = +1$, e $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, oppure $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$, oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$, $\alpha \in]\frac{1}{1+\beta^-}, 1]$.

Se $\Gamma = \Gamma_{out}$, i funzionali di costo $J_1(T)$ e $J_2(T)$ dipendono solo da p . I valori ottimi per $J_1(T)$ e $J_2(T)$ sono gli stessi per α quando $\Gamma = \Gamma_{in}$, se sostituiamo α con p , β^- con q^- , e β^+ con q^+ .

Appendice

In questa sezione riportiamo la dimostrazione del Teorema 10:

Dimostrazione: Per semplicità, da questo momento lasciamo da parte la dipendenza di $J_1(T)$ e $J_2(T)$ da T . Se $\Gamma = \Gamma_{in} = \Gamma_{out}$, A_1 e A_2 sono entrambe soddisfatte se e soltanto se

$\beta^- = \beta^+ = \frac{\gamma_d^{\max}}{\gamma_c^{\max}}$; quindi, $\alpha = \frac{\gamma_c^{\max}}{\Gamma}$. In questo caso,

$$\hat{\gamma} = (\gamma_a^{\max}, \gamma_b^{\max}, \gamma_c^{\max}, \gamma_d^{\max}),$$

e $J_1(T)$ e $J_2(T)$ non dipendono né da α né da p .

Assumiamo che $\Gamma = \Gamma_{in} < \Gamma_{out}$, e A_1 e A_2 sono entrambe soddisfatte. In questo caso,

$$\hat{\gamma} = (\gamma_a^{\max}, \gamma_b^{\max}, \alpha\Gamma, (1-\alpha)\Gamma),$$

e massimizzare $J_1(T)$ e minimizzare $J_2(T)$ è equivalente a massimizzare (6) e minimizzare (7), rispettivamente.

Assumiamo che $\Gamma = \Gamma_{in}$ e che A_1 e A_2 sono entrambe vere. Allora, $s_c = s_d = +1$; dobbiamo quindi massimizzare

$$\hat{J}_1 = H(-s_c) + H(-s_d) + \frac{1-\hat{\rho}_c}{\hat{\rho}_c} H(s_c) + \frac{1-\hat{\rho}_d}{\hat{\rho}_d} H(s_d) = \frac{\alpha\Gamma}{1-\alpha\Gamma} + \frac{(1-\alpha)\Gamma}{1-(1-\alpha)\Gamma},$$

e minimizzare

$$\hat{J}_2 = \frac{\hat{\rho}_c}{H(s_c) + \hat{\rho}_c[H(-s_c) - H(s_c)]} + \frac{\hat{\rho}_d}{H(s_d) + \hat{\rho}_d[H(-s_d) - H(s_d)]} = \frac{1-\alpha\Gamma}{\alpha\Gamma} + \frac{1-(1-\alpha)\Gamma}{(1-\alpha)\Gamma}.$$

Notiamo che il caso $\rho_a = \rho_b = \frac{1}{2}$ non può verificarsi, dal momento che avremmo $\gamma_a^{\max} = \gamma_b^{\max} = \frac{1}{2}$ e

$\Gamma = 1$; ma il massimo valore di Γ_{out} è 1, la qual cosa contraddice l'assunzione che $\Gamma_{in} < \Gamma_{out}$.

Dall'espressione della derivata prima e seconda di $J_1(T)$ e $J_2(T)$, risulta che $J_1(T)$ e $J_2(T)$ sono

convesse con un minimo in $\bar{\alpha}$, dove $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}$.

Per valori di α tali che A_1 è soddisfatta ma A_2 no e viceversa, abbiamo che $J_1(T)$ e $J_2(T)$ non dipendono da α e, in particolare, i valori di $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$ sono i seguenti:

$$\hat{J}_1 = \begin{cases} 2, & \text{se } s_c = s_d = -1, \\ \frac{1}{1-\Gamma + \gamma_{\psi'}^{\max}}, & \text{se } s_{\psi'} = -s_{\psi'} = +1, \alpha_{\psi'}\Gamma \geq \gamma_{\psi'}^{\max}, \\ \frac{1}{1-\gamma_{\psi}^{\max}}, & \text{se } s_{\psi'} = -s_{\psi'} = +1, \alpha_{\psi'}\Gamma \geq \gamma_{\psi}^{\max}, \end{cases}$$

$$\hat{J}_2 = \begin{cases} 2, & \text{se } s_c = s_d = -1, \\ \frac{1}{\Gamma - \gamma_{\psi'}^{\max}}, & \text{se } s_{\psi'} = -s_{\psi'} = +1, \alpha_{\psi'}\Gamma \geq \gamma_{\psi'}^{\max}, \\ \frac{1}{\gamma_{\psi}^{\max}}, & \text{se } s_{\psi'} = -s_{\psi'} = +1, \alpha_{\psi'}\Gamma \geq \gamma_{\psi}^{\max}, \end{cases}$$

dove abbiamo usato la notazione

$$\psi' = \begin{cases} c, & \text{se } \psi = d, \\ d, & \text{se } \psi = c, \end{cases}$$

$$\alpha_{\psi} = 1 - \alpha_{\psi'} = \begin{cases} \alpha, & \text{se } \psi = c, \\ 1 - \alpha, & \text{se } \psi = d. \end{cases}$$

Ottimizzazione di α :

Forniamo la scelta ottima di α inizialmente quando $s_c = s_d = +1$. Poi considereremo il caso in cui o s_c oppure s_d o entrambi sono uguali a -1. Possiamo raccogliere le seguenti informazioni per il funzionale J_1 :

Caso $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$:

J_1 è costante per $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^+}$, poi decresce per $\frac{1}{1+\beta^+} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, poi cresce per $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^-}$, e poi è ancora costante per $\frac{1}{1+\beta^-} \leq \alpha \leq 1$. Distinguiamo tre sottocasi:

1. $\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\beta^+} > \frac{1}{1+\beta^-} - \frac{1}{2}$ e semplificando $\beta^- \beta^+ > 1$. In questo caso abbiamo che i valori ottimi di J_1 sono per $\alpha \in \left[0, \frac{1}{1+\beta^+}\right]$;
2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\beta^+} = \frac{1}{1+\beta^-} - \frac{1}{2}$ e semplificando $\beta^- \beta^+ = 1$. I valori ottimi di J_1 sono per $\alpha \in \left[0, \frac{1}{1+\beta^+}\right] \cup \left[\frac{1}{1+\beta^-}, 1\right]$;
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\beta^+} < \frac{1}{1+\beta^-} - \frac{1}{2}$ e semplificando $\beta^- \beta^+ < 1$. I valori ottimi di J_1 sono per $\alpha \in \left[\frac{1}{1+\beta^-}, 1\right]$.

Caso $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$:

J_1 è costante per $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^+}$, poi cresce per $\frac{1}{1+\beta^+} \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^-}$, e poi è ancora costante per $\frac{1}{1+\beta^-} \leq \alpha \leq 1$. I valori ottimi di J_1 sono per $\alpha \in \left[\frac{1}{1+\beta^-}, 1\right]$.

Caso $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$:

J_1 è costante per $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^+}$, poi decresce per $\frac{1}{1+\beta^+} \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^-}$, e poi è ancora costante per $\frac{1}{1+\beta^-} \leq \alpha \leq 1$. I valori ottimi di J_1 sono per $\alpha \in \left[0, \frac{1}{1+\beta^+}\right]$.

Per il funzionale J_2 :

Caso $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$:

J_2 è costante per $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^+}$, poi decresce per $\frac{1}{1+\beta^+} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, poi cresce per $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^-}$,

e poi è ancora costante per $\frac{1}{1+\beta^-} \leq \alpha \leq 1$. Il valore ottimo di J_2 è per $\alpha = \frac{1}{2}$; **Caso $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$:**

J_2 è costante per $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^+}$, poi cresce per $\frac{1}{1+\beta^+} \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^-}$, e poi è ancora costante per

$\frac{1}{1+\beta^-} \leq \alpha \leq 1$. I valori ottimi di J_2 sono per $\alpha \in \left[0, \frac{1}{1+\beta^+}\right]$;

Caso $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$:

J_2 è costante per $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^+}$, poi decresce per $\frac{1}{1+\beta^+} \leq \alpha \leq \frac{1}{1+\beta^-}$, e poi è ancora costante

per $\frac{1}{1+\beta^-} \leq \alpha \leq 1$.

I valori ottimi di J_2 sono per $\alpha \in \left[\frac{1}{1+\beta^-}, 1\right]$.

Focalizziamo la nostra attenzione sul funzionale di costo J_1 e consideriamo il caso $s_c = -s_d = -1$.

Abbiamo le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{\gamma_d^{\max}}{1-\gamma_d^{\max}} + \frac{\Gamma - \gamma_d^{\max}}{1-\Gamma + \gamma_d^{\max}} < \frac{1}{1-\gamma_d^{\max}};$$

$$\frac{\gamma_c^{\max}}{1-\gamma_c^{\max}} + \frac{\Gamma - \gamma_c^{\max}}{1-\Gamma + \gamma_c^{\max}} < \frac{1}{1-\Gamma + \gamma_c^{\max}};$$

$$\frac{1}{1-\gamma_d^{\max}} > \frac{1}{1-\Gamma + \gamma_c^{\max}}.$$

Dunque nei casi $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$ oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$, il valore ottimo di J_1 è ottenuto per

$$\alpha \in \left[0, \frac{1}{1+\beta^+}\right].$$

Se $s_c = -s_d = +1$, abbiamo le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{\gamma_c^{\max}}{1-\gamma_c^{\max}} + \frac{\Gamma - \gamma_c^{\max}}{1-\Gamma + \gamma_c^{\max}} < \frac{1}{1-\gamma_c^{\max}};$$

$$\frac{\gamma_d^{\max}}{1-\gamma_d^{\max}} + \frac{\Gamma-\gamma_d^{\max}}{1-\Gamma+\gamma_d^{\max}} < \frac{1}{1-\Gamma+\gamma_d^{\max}};$$

$$\frac{1}{1-\gamma_c^{\max}} > \frac{1}{1-\Gamma+\gamma_d^{\max}}.$$

Quindi nei casi $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$ oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$, il valore ottimo di J_1 è per

$$\alpha \in \left[\frac{1}{1+\beta^-}, 1 \right].$$

Per quanto riguarda il funzionale di costo J_2 , possiamo fare come fatto prima con J_1 , e i risultati possono essere riassunti nel modo seguente:

- se $s_c = -s_d = -1$, e $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, $\alpha = \frac{1}{2}$;
- se $s_c = -s_d = -1$, e $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$, oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{1+\beta^+} \right]$;
- se $s_c = -s_d = +1$, $\beta^- \leq 1 \leq \beta^+$, oppure $1 \leq \beta^- \leq \beta^+$, oppure $\beta^- \leq \beta^+ \leq 1$, $\alpha \in \left[\frac{1}{1+\beta^-}, 1 \right]$.

Assumiamo che $\Gamma = \Gamma_{out}$, B_1 e B_2 sono entrambe vere. Allora, $s_a = s_b = +1$; e dobbiamo massimizzare

$$\hat{J}_1 = H(-s_a) + H(-s_b) + \frac{1-\hat{\rho}_a}{\hat{\rho}_a} H(s_a) + \frac{1-\hat{\rho}_b}{\hat{\rho}_b} H(s_b) = \frac{p\Gamma}{1-p\Gamma} + \frac{(1-p)\Gamma}{1-(1-p)\Gamma},$$

e minimizzare

$$\hat{J}_2 = \frac{\hat{\rho}_a}{H(s_a) + \hat{\rho}_a[H(-s_a) - H(s_a)]} + \frac{\hat{\rho}_b}{H(s_b) + \hat{\rho}_b[H(-s_b) - H(s_b)]} = \frac{1-p\Gamma}{p\Gamma} + \frac{1-(1-p)\Gamma}{(1-p)\Gamma}.$$

Per valori di p tali che B_1 è soddisfatta ma B_2 non lo è e viceversa, abbiamo che J_1 e J_2 non dipendono da α e, in particolare, i valori di $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$ sono i seguenti:

$$\hat{J}_1 = \begin{cases} 2 & \text{se } s_a = s_b = -1, \\ \frac{1}{1 - \Gamma + \gamma_{\varphi'}^{\max}} & \text{se } s_\varphi = -s_{\varphi'} = +1, \quad p_{\varphi'} \Gamma \geq \gamma_{\varphi'}^{\max}, \\ \frac{1}{1 - \gamma_\varphi^{\max}} & \text{se } s_\varphi = -s_{\varphi'} = +1, \quad p_\varphi \Gamma \geq \gamma_\varphi^{\max}, \end{cases}$$

$$\hat{J}_2 = \begin{cases} 2 & \text{se } s_a = s_b = -1, \\ \frac{1}{\Gamma - \gamma_{\varphi'}^{\max}} & \text{se } s_\varphi = -s_{\varphi'} = +1, \quad p_{\varphi'} \Gamma \geq \gamma_{\varphi'}^{\max}, \\ \frac{1}{\gamma_\varphi^{\max}} & \text{se } s_\varphi = -s_{\varphi'} = +1, \quad p_\varphi \Gamma \geq \gamma_\varphi^{\max}, \end{cases}$$

dove abbiamo usato la notazione:

$$\varphi' = \begin{cases} c, & \text{se } \varphi = d, \\ d, & \text{se } \varphi = c, \end{cases}$$

$$p_\varphi = 1 - p_{\varphi'} = \begin{cases} p, & \text{se } \varphi = c, \\ 1 - p, & \text{se } \varphi = d. \end{cases}$$

I valori ottimi di p per J_1 e J_2 possono essere elaborati considerando i risultati della precedente sottosezione, se sostituiamo α con p , β^- con q^- , e β^+ con q^+ . ■

Bibliografia:

- [1] D. Alderson, H. Chang, M. Roughan, S. Uhlig and W. Willinger, The many facets of internet topology and traffic, *Networks and Heterogeneous Media* 1, Vol. 4, (2006), 569-600.
- [2] F. Baccelli, D. Hong and Z. Liu, *Fixed points methods for the simulation of the sharing of a local loop by large number of interacting TCP connections*, Acts of ITC Specialists Seminar on Access Networks and Systems, Girona, 2001, pp. 233-244.
- [3] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws - The One – dimensional Cauchy Problem*, Oxford Univ. Press, 2000.

- [4] G. Bretti, R. Natalini, B. Piccoli, Numerical approximations of a traffic flow model on networks, *Networks and Heterogeneous Media* 1 (2006), 57-84.
- [5] A. Cascone, C. D'Apice, B. Piccoli and L. Rarità, Optimization of traffic on road networks, *Mathematical Models in Applied Sciences*, Vol. 17, No. 10 (2007), pp. 1587-1617.
- [6] Y. Chitour, B. Piccoli, Traffic circles and timing of traffic lights for cars flow, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* 5 (2005), 599 - 630.
- [7] G. Coclite, M. Garavello, B. Piccoli, Traffic Flow on Road Networks, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 36 (2005), 1862 - 1886.
- [8] C. D'Apice, R. Manzo, and B. Piccoli, Packets flow on telecommunication networks, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, vol. 38, n. 717, (2006), pp. 717-740.
- [9] M. Garavello and B. Piccoli, Traffic flow on a road network using the Aw – Rascle model, *Comm. Partial Differential Equations* 31 (2006), 243-275.
- [10] M. Garavello and B. Piccoli, Traffic flow on networks, *Applied Math Series Vol. 1*, American Institute of Mathematical Sciences, 2006.
- [11] E. Godlewsky and P. Raviart, Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws , Springer Verlag, Heidelberg 1996.
- [12] S. K. Godunov, A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Mat. Sb.* 47, 1959, pp. 271 - 290.
- [13] M. Gugat, M. Herty, A. Klar and G. Leugering, Optimal Control for Traffic Flow Networks, *Journal of Optimization Theory and Applications* 126, 2005, 589-616.
- [14] D. Helbing, S. Lmmmer and J.-P. Lebacque, Self-organized control of irregular or perturbed network traffic, in *Optimal Control and Dynamic Games*, C. Deissenberg and R. F. Hartl eds., Springer, Dordrecht, 2005, 239-274.
- [15] M. Herty and A. Klar, Modelling, Simulation and Optimization of Traffic Flow Networks, *SIAM J. Sci. Comp.* 25 (2003), 1066-1087.
- [16] M. Herty, S. Moutari, M. Rascle, Optimization criteria for modelling intersections of vehicular traffic flow, *Networks and Heterogeneous Media* 1 (2006), 275 - 294.
- [17] J. Hespanha, Stochastic Hybrid Modeling of On-Off TCP Flows, in *Stochastic Hybrid Systems: Recent Developments and Research Trends*, C. Cassandras and J. Lygeros eds., CRC PRESS, Boca Raton, 2006.
- [18] H. Holden and N. H. Risebro, A Mathematical Model of Traffic Flow on a Network of Unidirectional Roads, *SIAM J. Math. Anal.*, 26 (1995), pp.999 - 1017.
- [19] F. Kelly, A.K. Maulloo and D.K.H. Tan, *Rate control in communication net-*

works: shadow prices, proportional fairness and stability, J. of the Operational Re-search Society, 49 (1998), pp. 237-252.

- [20] A. Klar, Kinetic and macroscopic traffic flow models, Lecture notes for the XX School of Computational Mathematics, "Computational aspects in kinetic models", Piano di Sorrento (Italy) September 22-28, 2002.
- [21] J.P. Lebacque and J.B. Lesort, The godunov scheme and what it means for first order traffic flow models, Proceedings of the International symposium on transportation and traffic theory No13, Lyon , Pergamon Press, Oxford, 1996, 647-677.
- [22] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, On kinetic waves. II. Theory of Traffic Flows on Long Crowded Roads, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 229 (1955), pp. 317 - 345.
- [23] A. Marigo, Optimal Distribution Coefficients for Telecommunication Networks, Networks and Heterogeneous Media 1 (2006), 315 - 336.
- [24] A. Marigo, and B. Piccoli, Optimal distribution coefficients for packets traffic on a telecommunication network, Proc. IEEE Joint Int. Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC - ECC), 2005.
- [25] P. I. Richards, Shock Waves on the Highway, Oper. Res., 4, (1956), pp. 42 - 51.
- [26] W. Willinger and V. Paxson, *Where Mathematics meets the Internet*, Notices of the AMS, 45 (1998), pp. 961-970.